# Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence est un outil très pratique !

La démarche se décompose en deux temps :

- Dans un premier temps, on démontre de manière générale que **SI** quelque chose est vrai à **UNE** étape, alors cette chose est **TOUJOURS VRAIE** à l'étape **SUIVANTE**, quelques soit l'étape ! On reste **GÉNÉRAL** ! On ne dit pas que si c'est vrai à l'étape 2, c'est toujours vrai à l'étape 3 ! Non ! On reste général ! On dit que si c'est vrai à une étape quelconque de rang n, alors c'est toujours vrai à l'étape suivant de rang n+1 !

- Puis, on montre que cette chose est **VRAIE** pour la **PREMIERE** étape de la série… donc comme on a déjà montré que n'importe quelle étape vraie était toujours vraie à l'étape suivante, **TOUTES** les étapes sont vraies !

Par exemple, montrons grâce à nos connaissances en mécanique que si un domino est debout sur sa petite tranche à moins d'un centimètre d'un autre domino, alors si ce premier domino tombe, il fera aussi tomber celui à coté de lui. Il peut y avoir seulement 2 dominos l'un à coté de l'autre, ou un millier, cela n'a pas d'importance ; nous avons montré que si l'un tombe, alors le suivant tombe aussi ! De manière générale, nous avons montré que si $D_n$ (Domino placé à la $n^{ième}$ position) tombe, alors $D_{n+1}$ tombe aussi ! n peut être égal à 1 000 000, comme il peut être égal à 1 (minimum !), cela n'a pas d'importante : si $D_n$ tombe, alors $D_{n+1}$ tombe aussi et cette règle est vraie à partir de 2 dominos ! De plus, nous sommes restés **GÉNÉRAL**, donc ceci est valable **QUELQUE SOIT** la position du domino. Il peut être à la $100^{ième}$ position ou à la $2^{ième}$ ! Cela n'a pas d'importance ! Si le $100^{ième}$ tombe, le $101^{ième}$ tombe aussi, etc.

Puis montrons qu'effectivement, le **PREMIER** domino de la série tombe ! Alors si le $1^{er}$ domino $D_1$ tombe, le deuxième domino $D_2$ tombera aussi puisqu'on a déjà démonté que si $D_n$ tombe, $D_{n+1}$ tombe aussi. Ici n = 1 ! Et puisque $D_2$ est tombé, $D_3$ tombera aussi car nous avons montré que si $D_n$ tombe, $D_{n+1}$ tombe aussi. Ici n = 2 ! Et ainsi de suite à l'infini !

Pour résumer, il faut montrer que si quelque chose est vraie à l'étape n, alors cette chose est toujours vraie à l'étape n+1. On appelle cette phase la <u>démonstration du caractère héréditaire de l'hypothèse</u>. L'hypothèse étant « si c'est vrai à l'étape n » et le caractère héréditaire est « alors c'est vrai à l'étape n+1 ». Puis, on montre que l'hypothèse est vraie à partir d'un premier élément de la série. On appelle cette étape <u>l'initialisation</u> !

Exemples de démonstration par récurrence

<u>Exemple 1 :</u> On considère la suite $(U_n), n \in N$ définie par :

$$U_0 = 2$$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$$

Comment faire pour démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq U_n \leq 2$ ?

Voici les étapes de la démonstration par récurrence :

- **1 ère étape : initialisation de la récurrence :**
  Il faut démontrer la propriété au premier rang :
  le premier rang étant n = 0 puisque l'on dit dans l'énoncé pour tout entier naturel n, il faut

démontrer ici que :

$1 \leq U_0 \leq 2$

- **2 ème étape : hypothèse de récurrence :**
  on suppose qu'il existe un certain rang *n* pour lequel la propriété est vraie : ici on suppose que :
  $1 \leq U_n \leq 2$
- **3ème étape : passage au rang suivant :**
  on "s'appuie" sur l'hypothèse de récurrence :
  $1 \leq U_n \leq 2$
  et ce que l'on sait :
  $U_0 = 2$
  $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + U_n}$
  pour démontrer que la propriété reste vrai au rang *n + 1* c'est à dire qu'il faut montrer que :
  $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

- **Dernière étape :** on en conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel n

Voyons l'exemple résolu avec les différentes étapes :

- $U_0 = 2$ donc
  $1 \leq U_0 \leq 2$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- Supposons donc qu'il existe au moins - UN - n, tel que la propriété $1 \leq U_n \leq 2$ est vraie (et nous savons que c'est vrai car nous avons déjà démontré lors de l'étape précédente que cette propriété est vraie pour n = 0 )

- Démontrons que la propriété reste encore vraie au rang n+1 :

  $1 \leq U_n \leq 2$
  $2 \leq 1 + U_n \leq 3$
  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1 + U_n} \geq \frac{1}{3}$
  $1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{1 + U_n} \geq 1 + \frac{1}{3}$
  $\frac{3}{2} \geq U_{n+1} \geq \frac{4}{3}$
  $1 \leq \frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2$
  $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

  La propriété reste donc encore vraie au rang n +1.

- La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.